Über einen v. Staudt-schen Satz.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

1. Von v. STAUDT rührt der folgende Satz her:

Zwei Kurven haben eine paare bzw. eine unpaare Anzahl von Punkten gemeinsam, je nachdem wenigstens die eine bzw. keine von ihnen von paarer Ordnung ist.

Unter einer *Kurve* verstehen wir hier und im folgenden eine reelle, stetige und geschlossene Kurve, die in jedem Punkte eine bestimmte, mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat und aus endlichvielen konvexen Bögen besteht.

Haben die beiden Kurven speziellere Eigenschaften, so kann man über die Anzahl ihrer Schnittpunkte mehr aussagen. Es gilt der folgende Satz:

I. *Haben die einzügigen Kurven K_m und K_n, die ausser einfachen Doppelpunkten und Wendetangenten keine andere Punkt oder Geradensingularität haben, keine gemeinsamen Tangenten und gibt es in der Ebene einen Punkt, von dem an die eine Kurve keine Tangenten gehen, so ist die genaue Anzahl der gemeinsamen Punkte der beiden Kurven gleich $m.n$, wenn die Kurve K_m von einer Tangente von K_n in m, die Kurve K_n von einer Tangente von K_m in n getrennten Punkten geschnitten wird.*

Dieser Satz folgt aus seinem Dualen, den wir direkt beweisen werden:

II. *Haben die einzügigen Kurven C_m und C_n keinen gemeinsamen Punkt, keinen Doppelpunkt und keine Wende- und stationäre Tangente und liegt die Kurve C_m ganz im Endlichen, so ist die genaue Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n gleich $m.n$, wenn aus einem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n n bzw. m getrennte Tangenten an die andere Kurve gehen.*

Die Kurven C_m und C_n können auch keine Schnabelspitze haben. Eine Schnabelspitze — als Koinzidenz eines Wendepunktes und einer Spitze erster Art — ist auch zu den Wendepunkten zu rechnen.

2. Die Kurven C_m und C_n sind von gerader Ordnung, weil sie keine Wendetangenten haben. Die projektive Ebene wird also von der (doppelpunktlosen) Kurve C_m (oder C_n) in zwei Gebiete geteilt. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte desselben Gebietes, so geht aus ihnen die gleiche Anzahl von Tangenten an die Kurve C_m (oder C_n), weil man vom Punkte P_1 zum Punkte P_2 gelangen kann, ohne die Kurve zu überschreiten und weil die Kurve keine Wendetangente hat. Überschreitet man die Kurve in einem Punkte, so gelangt man in das andere Gebiet und die Anzahl der Tangenten ändert sich um zwei. Die Kurve C_m (bzw. C_n) ist also vom Maximal-Klassenindex[1]) und entweder ihre Klasse oder ihr Klassenindex ist gleich m (bzw. n).

Die Kurven C_m und C_n haben keinen gemeinsamen Punkt. Daraus folgt, dass aus jedem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n dieselbe Anzahl von Tangenten (d. h. n bzw. m) an die andere Kurve geht.

Die Kurve C_m liegt im Endlichen. Wir können also annehmen, dass die Kurve C_n ganz ausserhalb des von C_m begrenzten endlichen Gebietes T liegt.

3. Deformiert man die Kurve C_m stetig so, dass man sie in Bezug auf einen im Innern des Gebietes T liegenden Ähnlichkeitsmittelpunkt verkleinert, so verändert sich die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n während dieser Deformation der Kurve C_m nicht. Dies folgt aus den Untersuchungen über die Gestalten ebener Kurven von Herrn A. Kneser.[2])

Herr A. Kneser beweist zwar nur, dass bei irgendeiner stetigen Deformation einer Kurve eine Doppeltangente einfach erhalten bleibt, solange ihre Berührungspunkte getrennt und nicht singulär sind, aber auf Grund seines Beweises kann man leicht einsehen, dass eine Doppeltangente mit getrennten Berührungspunkten auch

[1]) Vgl. die Abhandlung der Verfassers: „Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex." Math. Ann. Bd. 89, (1923), S. 32—75.

[2]) „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven", Math. Ann. Bd. 41. (1893), §§ 17—19, S. 369—376.

dann einfach erhalten bleibt, wenn eine oder beide ihrer Berührungspunkte Spitzen erster Art sind. Aus der Umkehrbarkeit der Ähnlichkeitstransformation der Kurve C_m folgt also, dass die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n während der genannten Deformation der Kurve C_m unverändert bleibt.

Wir können also annehmen, dass es ein Oval gibt, welches die Kurven C_m und C_n voneinander trennt. Ist dies nicht der Fall, so ersetzt man die Kurve C_m durch eine entsprechend verkleinerte Kurve C_m', für welche ein Oval mit der genannten Eigenschaft existiert.

Aus den Punkten des Ovales geht dieselbe Anzahl von Tangenten an die Kurve C_m bzw. C_n, wie aus einem Punkte der Kurve C_n bzw. C_m, weil man aus einem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n ausgehend zu einem Punkte des Ovales gelangen kann, ohne die Kurve C_n bzw. C_m zu übertreten.

4. Wir ziehen aus einem Punkte M des Ovales eine der m Tangenten an die Kurve C_m. Von dieser Tangente der Kurve C_m wird das Oval noch im Punkte P geschnitten. Schneidet eine der n Tangenten, die aus P ausgehen, das Oval noch im Punkte N, so bestimmt diese Konstruktion zwischen den Punkten M und N des Ovales eine $[mn, mn]$ Korrespondenz. In dieser Korrespondenz entsprechen jedem Punkte des Ovales, als Punkt M oder N aufgefasst, genau mn Punkte N bzw. M.

Ein Punkt M fällt dann und nur dann mit einem seiner entsprechenden Punkte N zusammen, wenn die gerade $PM \equiv PN$ eine gemeinsame Tangente der Kurven C_m und C_n ist. Jede gemeinsame Tangente der Kurven C_m und C_n schneidet aus dem Ovale zwei Punkte aus, weil die Kurve C_m innerhalb des Ovales liegt. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n ist also die Hälfte der Koinzidenzen in der Korrespondenz $[mn, mn]$.

Bewegt sich der Punkt M auf dem Ovale in einer Richtung, so bewegt sich — wie wir beweisen wollen — jeder den entsprechenden Punkte N in entgegengesetzter Richtung.

Sind P_1 und P_2 bzw. N_1 und N_2 nach der vorigen Konstruktion entsprechende benachbarte P und N Punkte der benachbarten Punkte M_1 und M_2, so schneiden die Geraden $P_1 M_1$ und $P_2 M_2$ einander innerhalb des Ovales (in der Nähe der Berührungspunktee der Kurve C_m mit den Tangenten $P_1 M_1$ und $P_2 M_2$), die Geraden

$P_1 N_1$ und $P_2 N_2$ aber ausserhalb des Ovales (in der Nähe der Berührungspunkte der Kurve C_n mit den Tangenten $P_1 N_1$ und $P_2 N_2$). Bewegt sich also der Punkt P auf dem Ovale in einer Richtung, so bewegt sich der Punkt M in gleicher, der Punkt N aber in entgegengesetzter Richtung.

In unserer $[mn, mn]$ Korrespondenz laufen also die entsprechenden Punkte M und N auf dem Ovale in entgegengesetzter Richtung. Nach dem elementaren Korrespondenzsatze von Herrn C. Juel[3]) gibt es also in unserer Korrespondenz $mn + mn = 2\,mn$ Koinzidenzen. Es gibt also mn gemeinsame Tangenten der Kurven C_m und C_n, wenn man eine gemeinsame Tangente, die zugleich Doppeltangente der einen Kurve ist, mit entsprechender Multiplizität rechnet.

Damit sind die Sätze I und II vollständig bewiesen.

5. Der Satz II lässt sich für Kurven, die aus mehreren Zügen bestehen können, auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Sind C_m und C_n Kurven ohne Wende- und Doppelpunkte, von denen die eine Kurve in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete T liegt, das keinen Punkt der anderen Kurve enthält und gehen m bzw. n. Tangenten der Grenzlinie von T an die Kurve C_m bzw. C_n, so haben die Kurven C_m und C_n mn gemeinsame Tangenten.*

Auf Grund des Vorigen lässt sich dieser Satz ohne Weiteres beweisen. Die Kurven C_m und C_n können auch Doppelpunkte haben. Die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte an die Kurve C_m (oder C_n) gehen, ändert sich nämlich auch in diesem Falle nur dann, wenn der Punkt die Kurve durchschreitet, weil die Kurve keine Wende- und stationäre Tangenten hat.

---

[3]) C. Juel: „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung“, S. 23—26. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Raekke, Naturv. og Math. Afd. XI. 2, (1914), S. 23—26.